Musterlösung

Aufgabe 1

a)

$$\begin{aligned} & (x - 3)(x + 2) &=& \ (x - 4)^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x - 6 &=& \ x^2 - 8x + 16 \\ \Leftrightarrow\ & 7x &=& \ 22 \\ \Leftrightarrow\ & x &=& \ 3\tfrac{1}{7} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & (2x - 3)^2 - 3(x - 4) &=& \ 4x(x - 5) + 12 \\ \Leftrightarrow\ & 4x^2 - 12x + 9 - 3x + 12 &=& \ 4x^2 - 20x + 12 \\ \Leftrightarrow\ & -15x + 9 &=& \ -20x \\ \Leftrightarrow\ & 5x &=& \ -9 \\ \Leftrightarrow\ & x &=& \ -1{,}8 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} & 10x - (x - 3)^2 &=& \ x(x + 2) - 9 \\ \Leftrightarrow\ & 10x - x^2 + 6x - 9 &=& \ x^2 + 2x - 9 \\ \Leftrightarrow\ & 16x - 9 &=& \ 2x^2 + 2x - 9 \\ \Leftrightarrow\ & 0 &=& \ 2x^2 - 14x \\ \Leftrightarrow\ & 0 &=& \ 2x(x - 7) \end{aligned}$$

also: $x_1 = 0$ und $x_2 = 7$ (nach Fallunterscheidung)

Aufgabe 2

a) A(1/5) und B(3/1)

$m = \frac{1-5}{3-1} = \frac{-4}{2} = -2$, also: $g(x) = -2x + b$

$g(3) = 1$, d. h. $-6 + b = 1 \Leftrightarrow b = 7$ und somit gilt: $\mathbf{g(x) = -2x + 7}$

vgl. zusammenfassende Skizze am Ende dieser Aufgabe!

b) $g(x) = 0$, d. h. $-2x + 7 = 0 \Leftrightarrow 2x = 7 \Leftrightarrow$ $\mathbf{x = 3{,}5}$

c) Parallele Geraden haben die gleiche Steigung, Ansatz ist also: $h(x) = -2x + b$

Wegen $h(-1) = 3$ folgt: $2 + b = 3 \Leftrightarrow b = 1$; es gilt also: $\mathbf{h(x) = -2x + 1}$

d) Die Steigung der Geraden k muss $m_k = \frac{1}{2}$ betragen, es gilt also: $\mathbf{k(x) = \frac{1}{2}x + b}$

Wegen $k(6) = 5$ folgt: $3 + b = 5 \Leftrightarrow b = 2$; es gilt also: $\mathbf{k(x) = \frac{1}{2}x + 2}$

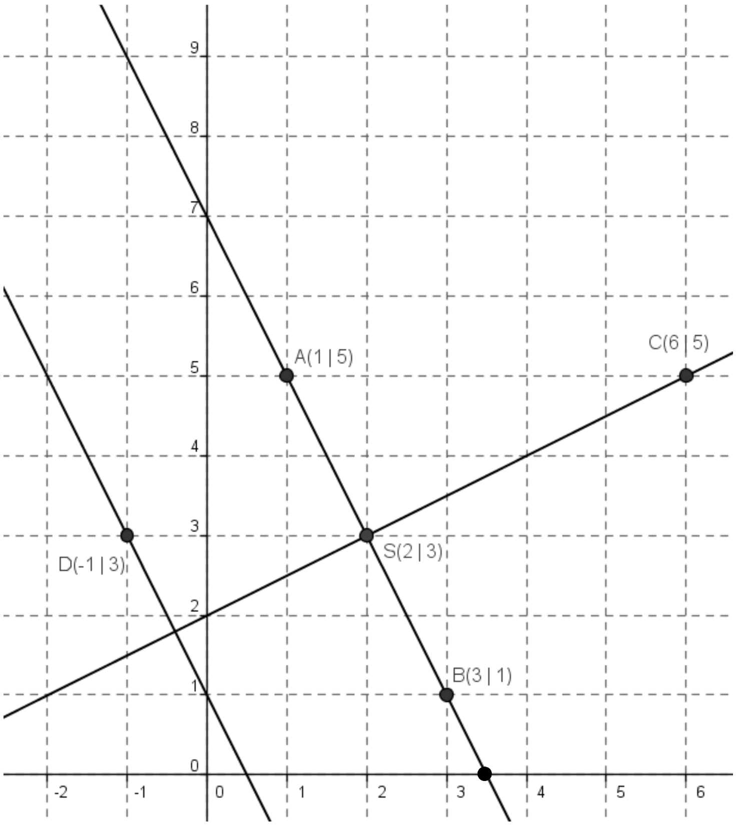
Anmerkung: Zwei Geraden verlaufen genau dann orthogonal zueinander, wenn das Produkt ihrer Steigungen -1 ergibt!

e) Die x-Koordinate des Schnittpunktes berechnet man über das Gleichsetzen der beiden Gleichungen: $-2x + 7 = \frac{1}{2}x + 2 \Leftrightarrow -2{,}5x = -5 \Leftrightarrow x = 2$

Einsetzen in h oder k ergibt dann die y-Koordinates: $S_y = 3$

also: **S(2/3)**

Skizze zu der Aufgabenstellung



Aufgabe 3

Teil a)

i) $5x + 3y = 14 \Leftrightarrow 10x + 6y = 28$

ii) $-2x + y = -10 \Leftrightarrow -10x + 5y = -50$

i*) + ii*) $11y = -22 \Leftrightarrow y = -2$ und $x = 4$

Teil b)

i) $3x - 5y = 39 \Leftrightarrow 6x - 10y = 78$

ii) $2x + 6y = -58 \Leftrightarrow -6x - 18y = 174$

i*) + ii*) $-28y = 246 \Leftrightarrow y = -9$ und $x = -2$

Teil c)

i) $\frac{3}{8}x + 2y = 7 \Leftrightarrow 3x + 16y = 56$

ii) $-x - \frac{3}{5}y = 5 \Leftrightarrow -3x - \frac{9}{5}y = 15$

i*) + ii*) $16y - \frac{9}{5}y = 71 \Leftrightarrow 14\frac{1}{5}y = 71 \Leftrightarrow y = 5$ und $x = -8$

Aufgabe 4

Ansatz (Variableneinführung, Gleichungssystem aufstellen und lösen):

x: Anzahl der 2-Cent-Münzen

y: Anzahl der 5-Cent-Münzen

i) $x + y = 66 \Leftrightarrow -2x - 2y = -132$

ii) $2x + 5y = 180$

i*) + ii) $3y = 48$

also: y = 16 und x = 50

Aufgabe 5

a) Zylindermaße: r = 4 cm und h = 12 cm.

$V = \pi r^2 h = 192\pi \approx 603{,}19\ cm^3$

$M = 2\pi rh = 96\pi \approx 301{,}59\ cm^2$

$O = M + 2\pi r^2 = 128\pi \approx 402{,}12\ cm^2$

b) $m = 192\pi \cdot 6\ g = 1152\pi\ g = 3619{,}11\ g = 3{,}619\ kg$

c) $6635\ g : 6g = 1105{,}8\overline{3}$, dies ist also das Volumen in cm^3

$1105{,}8\overline{3}\ cm^3 : 16\pi = h \Leftrightarrow h \approx 21{,}9999$; **also: h = 22 cm**

Aufgabe 6

a) Diese Körper ist ein zusammengesetzter, dabei wurde einem Quader ein gerades Prisma mit einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck als Grundfläche aufgesetzt.

b) Lösung über Summe: $V_{Quader} = a \cdot 2a \cdot 4a = 8a^3$ und $V_{Prisma} = \frac{1}{2}a^2 \cdot 4a = 2a^3$

also: $V_{Körper} = 8a^3 + 2a^3 = 10a^3$

c) $270 = 10a^3 \Leftrightarrow 27 = a^3 \Leftrightarrow a = 3$

Es muss also a = 3 cm gelten, so dass sich ein Volumen von 270 cm^3 ergibt. Im letzten Schritt suchen wir eine Zahl mit der Eigenschaft, dass ihre Kubikzahl 27 lautet, dies ist offensichtlich 3.

d) Die oben liegende Seitenfläche des Prismas kann nicht vollständig berechnet werden. Sie stellt als Abwicklung ein Rechteck dar, wobei die Höhe bekannt ist und die Breite

über eine geeignete Skizze zu bestimmen wäre. Diese Größe entspricht der Länge der Diagonalen in einem Quadrat mit der Seitenlänge a = 4cm.
Für die konkrete Rechnung ergibt sich dann etwa:

Quaderfläche 1 (Bodenfläche): $4 \cdot 16$ cm² = 64 cm²
Quaderflächen 2 und 3 (Seitenflächen links und rechts): $2 \cdot 8 \cdot 16$ cm² = 256 cm²
Quaderflächen 4 und 5 (Seitenflächen vorne und hinten): $2 \cdot 4 \cdot 8$ cm² = 64 cm²
Prismenflächen 1 und 2 (Boden und Deckel) = 16 cm²
Prismenfläche 3 (Seitenfläche links) = $4 \cdot 16$ cm² = 64 cm²
Prismenfläche 4 (Seitenflächen oben rechts) = $5{,}65 \cdot 16$ cm² $\approx$ 90,4 cm²

Erkenntnis: $O_{Körper} \approx 554{,}4$ cm²

Aufgabe 7
Wir multiplizieren zum Beispiel die erste Gleichung mit d und die zweite mit –a, bei Addition der entstehenden Gleichungen fällt dann das x heraus!

i) $\mathbf{a}x + \mathbf{b}y = \mathbf{c} \Leftrightarrow adx + bdy = cd$
ii) $\mathbf{d}x + \mathbf{e}y = \mathbf{f} \Leftrightarrow -adx - aey = -af$
i*) + ii*) $bdy - aey = cd - af \Leftrightarrow y(bd - ae) = cd - af \Leftrightarrow y = \dfrac{cd - af}{bd - ae}$
Auf die gleiche Weise kann man x berechnen!