Musterlösung

Aufgabe 1

a) $(2x + y)^2 - 4(x + 2y)(x - 2y) - 2(x - 2y)^2$

$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4(x^2 - 4y^2) - 2(x^2 - 4xy + 4y^2)$

$= 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x^2 + 16y^2 - 2x^2 + 8xy - 8y^2$

$= -2x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $\sqrt{50} - \sqrt{8} = \sqrt{2 \cdot 25} - \sqrt{2 \cdot 4} = 5 \cdot \sqrt{2} - 2 \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

Aufgabe 2

a)
$$\begin{aligned} && -2(x + 8) + 5x &= 2(x - 5) - 4(x - 10) - 31 \\ \Leftrightarrow && -2x - 16 + 5x &= 2x - 10 - 4x + 40 - 31 \\ \Leftrightarrow && 3x - 16 &= -2x - 1 \\ \Leftrightarrow && 5x &= 15 \\ \Leftrightarrow && x &= 3 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} && 2x(x - 3) - (x + 2)^2 &= -(x + 1)(x + 4) \\ \Leftrightarrow && 2x^2 - 6x - x^2 - 4x - 4 &= -(x^2 + 5x + 4) \\ \Leftrightarrow && x^2 - 10x - 4 &= -x^2 - 5x - 4 \\ \Leftrightarrow && 2x^2 - 5x &= 0 \\ \Leftrightarrow && x(2x - 5) &= 0 \end{aligned}$$

also: $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}5$

c)
$$\begin{aligned} && (2x + 4)^2 - (x + 2)^2 &= (x + 2)(x + 10) \\ \Leftrightarrow && 4x^2 + 16x + 16 - x^2 - 4x - 4 &= x^2 + 12x + 20 \\ \Leftrightarrow && 3x^2 + 12x + 12 &= x^2 + 12x + 20 \\ \Leftrightarrow && 2x^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow && x^2 &= 4 \end{aligned}$$

also: $x_{1/2} = \pm 2$

d)
$$\begin{aligned} && 2 \cdot \sqrt{2x-5} - 3 \cdot \sqrt{x - 3} &= 0 \\ \Leftrightarrow && 2 \cdot \sqrt{2x-5} &= 3 \cdot \sqrt{x - 3} \\ \Leftrightarrow && 4(2x - 5) &= 9(x - 3) \\ \Leftrightarrow && 8x - 20 &= 9x - 27 \\ \Leftrightarrow && x &= 7 \end{aligned}$$

e) $\sqrt{x+9} - x + 3 = 0$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad \sqrt{x+9} &= x - 3 \\ \Leftrightarrow \quad x + 9 &= x^2 - 6x + 9 \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x^2 - 7x \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= x(x - 7) \end{aligned}$$

also: $x_1 = 0$; $x_2 = 7$

Probe : $L = \{ 7 \}$

f) Fallunterscheidung liefert direkt: $x_1 = 0$; $x_2 = -0,5$ und $x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$

Merke: Ein Produkt wird genau dann null, wenn zumindest einer der Faktoren null ist.

Aufgabe 3

Teil a)

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{140-50}{60-10} = \frac{90}{50} = 1,8$

$f(10) = 50$, d. h. $50 = 18 + b \Leftrightarrow b = 32$

also: $f(x) = 1,8x + 32$

Teil b) $f(25) = 77$

Teil c) $125 = 1,8x + 32 \Leftrightarrow x = 51\frac{2}{3}$

d) und e) vgl. Skizze auf der folgenden Seite!

Aufgabe 4

Teil a)

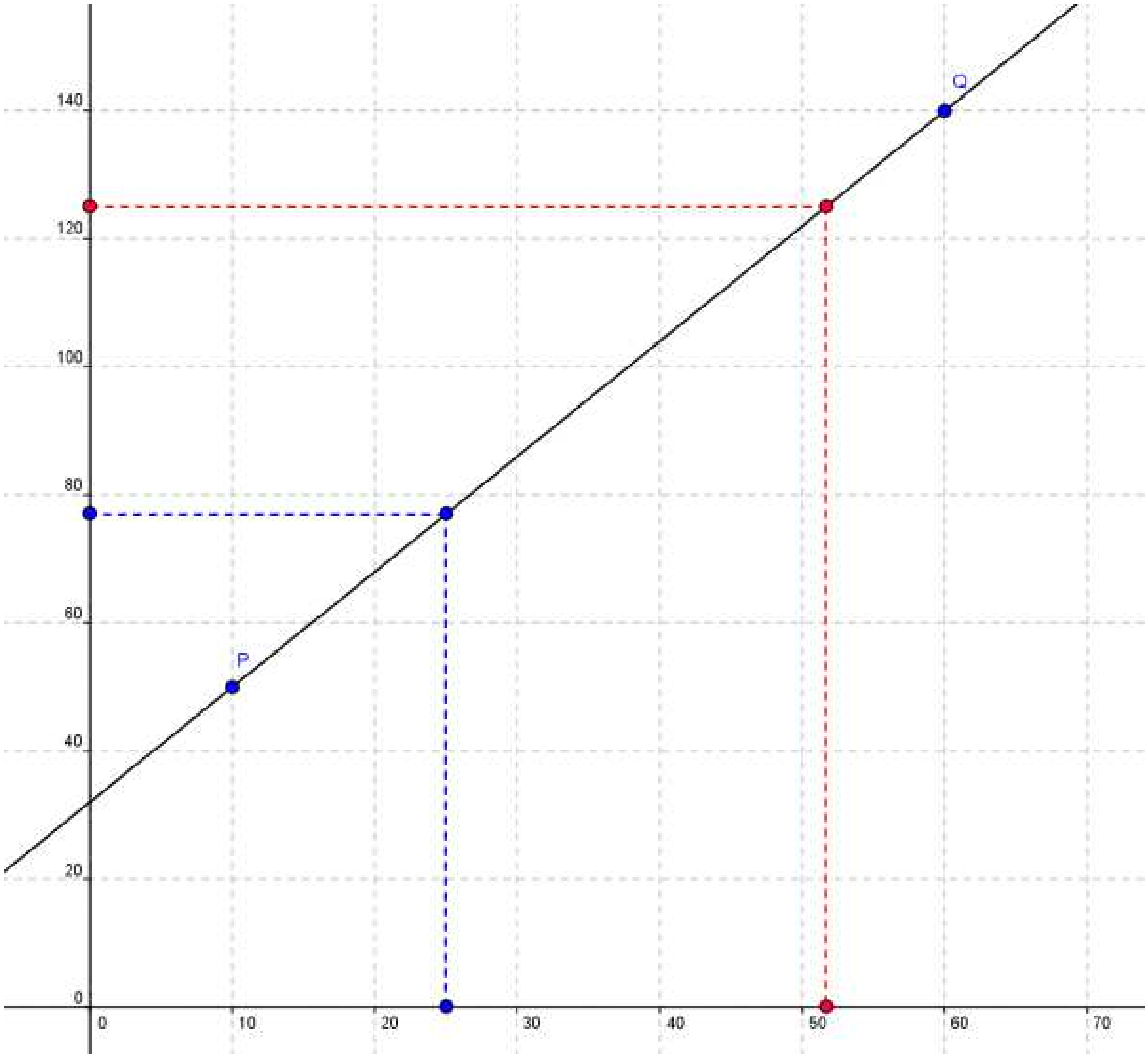
Mit Hilfe des Heronverfahrens kann man die Quadratwurzel einer Zahl näherungsweise bestimmen. Dabei nutzt man den Gedanken, dass ein Quadrat mit dem Flächeninhalt a die Seitenlänge $\sqrt{a}$ hat. Man startet also mit einem beliebigen Rechteck, das den Flächeninhalt a hat. Anschließend überführt man dieses Schritt für Schritt in Rechteckgestalt. Dies erreicht man, wenn man die neuen Seitenlängen über das arithmetische Mittel der vorhergehenden und die gewünschte konstante Flächeneigenschaft berechnet.

Teil b)

Auf der folgenden Seite sieht man die Wurzelapproximation in Tabellenform. Das Ausgangsrechteck hat eine Größe von 6 cm · 10 cm. Nach gerade einmal vier Iterationsschritten hat man die Wurzel aus 60 auf fünf Nachkommastellen berechnet.

i	x_i	y_i	Wurzelapproximation
1	6.00000000	10.00000000	$6.00000000 \leq \sqrt{60} \leq 10.00000000$
2	8.00000000	7.50000000	$7.50000000 \leq \sqrt{60} \leq 8.00000000$
3	7.75000000	7.74193548	$7.74193548 \leq \sqrt{60} \leq 7.75000000$
4	7.74596774	7.74596564	$7.74596564 \leq \sqrt{60} \leq 7.74596774$
5	7.74596669	7.74596669	$7.74596669 \leq \sqrt{60} \leq 7.74596669$

Skizze zu Aufgabe Nr. 3



Aufgabe 5

i) $4x - 2y = 6 \Leftrightarrow 12x - 6y = 18$

ii) $6x + 5y = -7 \Leftrightarrow 12x + 10y = -14$

i*) – ii*) $-16y = 32 \Leftrightarrow y = -2$

Lösung: $x = 0{,}5$ und $y = -2$

Aufgabe 6

a) $\sqrt{2xy^3z^5} \cdot \sqrt{6xy} \cdot \sqrt{3y^2z^3} = \sqrt{2xy^3z^5 \cdot 6xy \cdot 3y^2z^3} = \sqrt{36x^2y^6z^8} = 6xy^3z^4$

b) $\dfrac{\sqrt{6a^5bc} \cdot \sqrt{8a^2b^4c^6}}{\sqrt{3ab^3c^3}} = \sqrt{\dfrac{6a^5bc \cdot 8a^2b^4c^6}{3ab^3c^3}} = \sqrt{16a^6b^2c^4} = 4a^3bc^2$

Aufgabe 7

a) Es muss also gelten (Quotientengleichheit für „kürzere Seite : längere Seite“):

$$\frac{h}{20} = \frac{10}{h} \Leftrightarrow h^2 = 200 \Leftrightarrow h = \sqrt{200}$$

b) Der verallgemeinerte Ansatz liefert:

$$\frac{h}{b} = \frac{\frac{b}{2}}{h} \Leftrightarrow h^2 = \frac{b^2}{2} \Leftrightarrow h = \frac{b}{\sqrt{2}}$$

Hinweis

Alle DIN-Formate haben die hier geforderte Eigenschaft. Dabei misst also die längere der beiden Seiten stets das $\sqrt{2}$-fache der kürzeren Seite.