Musterlösung

Aufgabe 1

a) $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = -1 \pm 3$; $x_1 = -4$ und $x_2 = 2$

b) Man errät die Nullstelle $x_1 = 1$ und führt dann eine Polynomdivision durch:

$(x^3 - 21x + 20) : (x - 1) = x^2 + x - 20$

$\underline{-(x^3 - x^2)}$

$x^2 - 21x + 20$

$\underline{-(x^2 - x)}$

$-20x + 20$

$\underline{-(-20x + 20)}$

$\underline{\underline{0}}$

$x_{2/3} = -0{,}5 \pm \sqrt{20{,}25}$; also: $x_2 = -5$ und $x_2 = 4$

c) $0 = 3x^6 - 12x^4 = 3x^4(x^2 - 4)$

also: $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 2$

d) $0 = \log_8(x^3 - x + 64) - 2$

$\Leftrightarrow \log_8(x^3 - x + 64) = 2$

$\Leftrightarrow x^3 - x + 64 = 64$

$\Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0$

also: $x_1 = 0$; $x_{2/3} = \pm 1$

Aufgabe 2

a) $\mathbb{D} = R \setminus \{\pm 2\}$

b) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f = 0$ (Nennerfunktion hat den höheren Grad)

c) Bedingung für Punktsymmetrie bzgl. des Nullpunktes: $f(x) = -f(-x)$

also: $\frac{x}{x^2 - 4} = -\frac{-x}{(-x)^2 - 4} \Leftrightarrow \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{x}{x^2 - 4}$ q.e.d.

d) Ansatz: $\frac{x}{x^2 - 4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 4 = x \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = 0$

also: $x_{1/2} = 0{,}5 \pm \sqrt{4{,}25}$

Aufgabe 3

a) $f'(x) = 5x^4 + 4x$

b) $f'(x) = \frac{1}{2}x^3 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

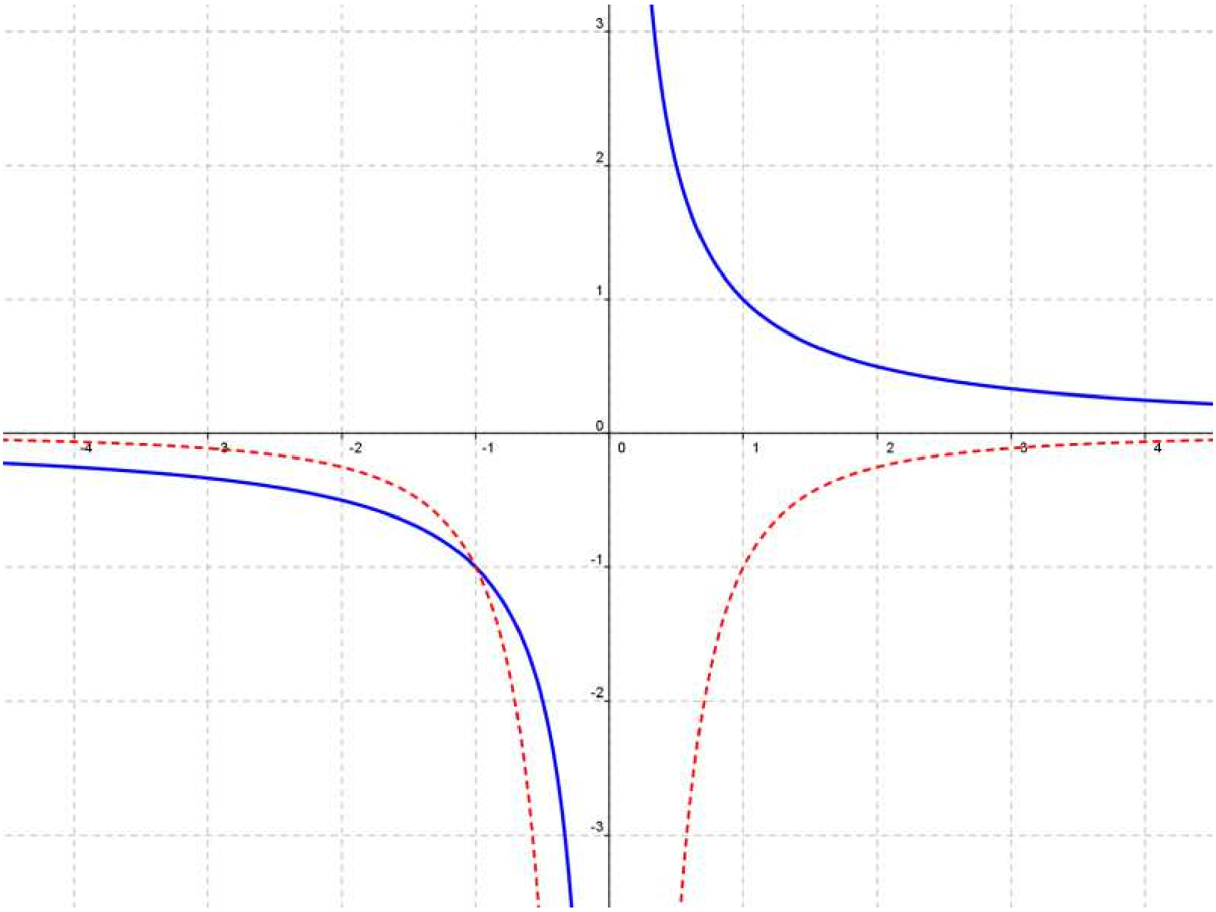
c) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x$

d) $f'(x) = 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Hinweis

Beachte bei c), dass zunächst ausmultipliziert werden muss!

Aufgabe 4 – Teil a)



Teil b) Argumentationsvorschlag

Die obige Skizze zeigt die Funktion f (blau) und deren Ableitung f ‘. Folgende Eigenschaften muss f ‘ besitzen: Definitionslücke an der Stelle $x = 0$, Funktionswerte sind durchgehend negativ (vgl. Steigungsverhalten von f), Funktionswerte streben im positiven und negativen Unendlichen gegen null (vgl. Steigungsverhalten von f), Funktionswerte streben für $x \to 0$ gegen unendlich (negatives Vorzeichen), Ableitungsfunktion ist symmetrisch zur y-Achse.

Teil c)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x - (x+h)}{x \cdot (x+h)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{x \cdot h \cdot (x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{x\,h\,(x+h)} = \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x\,(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

Aufgabe 5

$f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 2x$; also $f'(x) = \frac{1}{2}x + 2$

$f(2) = 5$ und $f'(2) = 3$

$t(x) = 3x + b$; wegen $t(2) = 5$ folgt dann: $5 = 6 + b \Leftrightarrow b = -1$

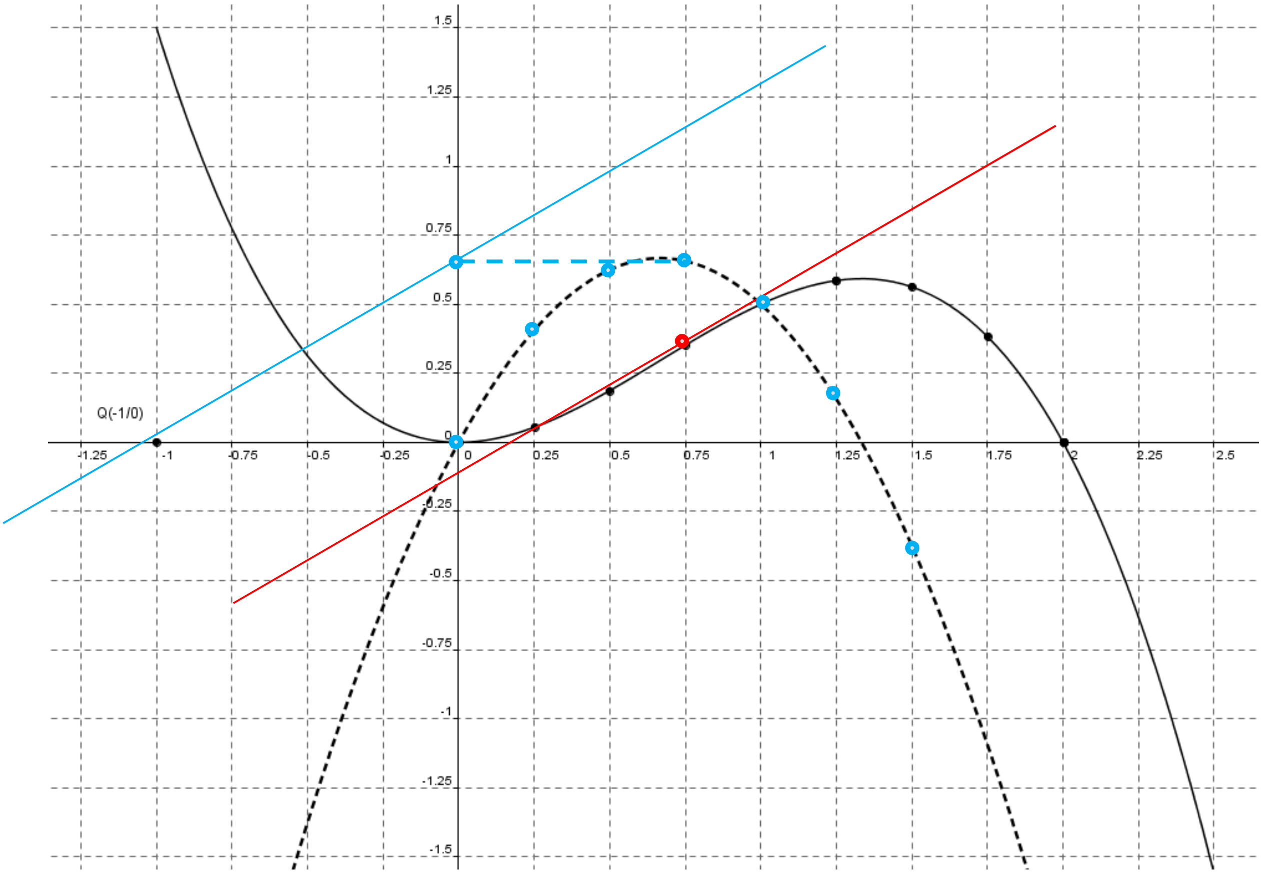
$t(x) = 3x - 1$

Aufgabe 6

Die Schritte des graphischen Differenzierens sind die folgenden:

– Die Tangente t wird zunächst **nach Augenmaß** im Punkt P(2/4) angelegt.
– Die Tangente t wird nun **parallel verschoben**, bis sie durch den Punkt Q(-1/0) geht (das Ergebnis heißt in der Skizze t ‘). Die **Steigung ändert sich** bei einer Parallelverschiebung **nicht**.
– Der Punkt Q, der Koordinatenursprung und der y-Achsenabschnitt von t ‘ stellen ein **Steigungsdreieck** dar. Es gilt dabei wegen der speziellen Lage von Q stets $\Delta x = 1$. Damit kann die Steigung unmittelbar als y-Achsenabschnitt der Geraden t ‘ abgelesen werden. Der y-Achsenabschnitt von t ‘ kann also als Näherungswert für die Ableitung der Funktion $f(x) = 2^x$ an der Stelle $x = 2$ angesehen werden.

Die Skizze auf der folgenden Seite zeigt das Ergebnis des graphischen Differenzierens am Beispiel der vorgelegten Funktion! Auf das Eintragen der Tangenten und deren Parallelen wurde hier mit Ausnahme des Wertes x = 0,75 verzichtet!



Hinweis

f = durchgezogener Graph

f ‘ = gestrichelter Graph