Musterlösung der Klausur

Teil a)

Parameterform der Ebene (Standardform):

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}2\\-4\\-2\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}1\\-6\\-2\end{pmatrix} \Leftrightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}$$

Berechnung des Normalenvektors:

$$\vec{n_1} = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}$$

Punktnormalenform:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = 0$$

Normalenform:

$$E: \vec{x} \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix} = 12$$

Koordinatenform:

E: $2x - y + 4z = 12$

Teil b)

Der Spurpunkt S_x hat Koordinaten der Form $S_x(x/0/0)$.

Setzt man $y = z = 0$, so folgt $x = 6$, es gilt also: $S_x(6/0/0)$

Der Spurpunkt S_y hat Koordinaten der Form $S_y(0/y/0)$.

Setzt man $x = z = 0$, so folgt $y = -12$, es gilt also: $S_x(0/-12/0)$

Der Spurpunkt S_z hat Koordinaten der Form $S_z(0/0/z)$.

Setzt man $x = y = 0$, so folgt $z = 3$, es gilt also: $S_z(0/0/3)$

Skizze vgl. letzte Seite der Musterlösung!

Teil c)

Man stellt eine Geradengleichung auf, in welcher der Punkt R als Stützpunkt und der Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor genutzt wird. Diese Gerade schneidet man dann mit der Ebene E. Wählt man dabei die Darstellung von E in Koordinatenform, so ist diese Lageuntersuchung äquivalent zum Lösen einer Gleichung mit einer Unbekannten.

Es gilt:

E: $2x - y + 4z = 12$ und g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

$2(6 + 2\lambda) - (-6 - \lambda) + 4(9 + 4\lambda) = 12$

$12 + 4\lambda + 6 + \lambda + 36 + 16\lambda = 12$

$21\lambda = -42$

$\lambda = -2$

Einsetzen dieses Wertes in die Geradengleichung ergibt die gesuchte Lösung, es gilt: F(2/-4/1)

Teil d)

Um ganzzahlige Koordinaten für F garantieren zu können, legen wir das angestrebte Ergebnis fest, wir wählen also einen beliebigen Punkt $P(x_0/y_0/z_0)$, so dass die Koordinaten x_0, y_0 und z_0 der Gleichung $2x_0 - y_0 + 4z_0 = 12$ genügen. Auf diesen Ortsvektor addieren wir – sinnvollerweise - ein ganzzahliges Vielfaches des Normalenvektors auf, so gelangen wir zu einem Punkt R, der selbst ganzzahlige Koordinaten hat und der zudem die Bedingung erfüllt, dass sein Lotfußpunkt ebenfalls ganzzahlige Koordinaten hat.

Konkrete Umsetzung:

Der Punkt F(1/-2/2) liegt in der Ebene E. Alle möglichen Punkte R mit dem Lotfußpunkt F liegen auf der folgenden Geraden:

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Für $\lambda = 5$ erhält man zum Beispiel R(11/-7/22).

Teil e)

S(5/6/7)

Es gilt: $d = |(\vec{s} - \vec{p}) \circ \vec{n}_0|$, wobei P ein **beliebiger Punkt der Ebene** ist.

Für diesen konkreten Fall ergibt sich:

$$d = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \left| \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \left| \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \frac{20}{\sqrt{21}} \approx 4{,}36$$

Teil f)

Zur Berechnung des Winkels γ benötigen wir die folgenden beiden orientierten Strecken:

$$\vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es folgt dann:

$$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{11}{\sqrt{41} \cdot \sqrt{5}}$$

also: $\gamma \approx 39{,}80°$

Teil g)

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Einsetzen in die Koordinatenform der Ebene ergibt:

$2(2 + \lambda) - (-2\lambda) + 4(4 + 2\lambda) = 12 \Leftrightarrow 4 + 2\lambda + 2\lambda + 16 + 8\lambda = 12 \Leftrightarrow 12\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

Einsetzen von λ in die Geradengleichung ergibt dann: Schnitt in $S(1\frac{1}{3} / 1\frac{1}{3} / 2\frac{2}{3})$

Teil h)

E: $2x - y + 4z = 12$

E_1: $-x + y + 2z = 4$

$E + E_1$: $x + 6z = 16 \Leftrightarrow x = 16 - 6z$

$-16 + 6z + y + 2z = 4 \Leftrightarrow y = 20 - 8z$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -6 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teil i)

E: $2x - y + 4z = 12$

Alle Ebenen, die den gleichen Normalenvektor haben wie E, verlaufen parallel zu dieser Ebene. Es gilt also E_2: $2x - y + 4z = d$

Der Punkt X(8/4/-2) soll in der Ebene E_2 liegen, also muss d = 4 gelten.

Die gesuchte Ebene lautet somit **E_2: $2x - y + 4z = 4$**

Teil j)

Zwei Ebenen verlaufen orthogonal zueinander, wenn deren Normalenvektoren orthogonal sind, wenn also das Skalarprodukt der beiden Normalenvektoren null ist. Wir wählen also zum Beispiel:

$$\vec{n}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ da } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \text{ gilt}$$

Es folgt dann E_3: $x + 2y = d$

Da der Punkt A(1/2/3) in der Ebene E_3 liegen soll, muss $d = 5$ sein. Eine mögliche Lösung lautet also:

E_3: $x + 2y = 5$

Hinweis

Es gibt unendlich viele Lösungsebenen!

Teil k)

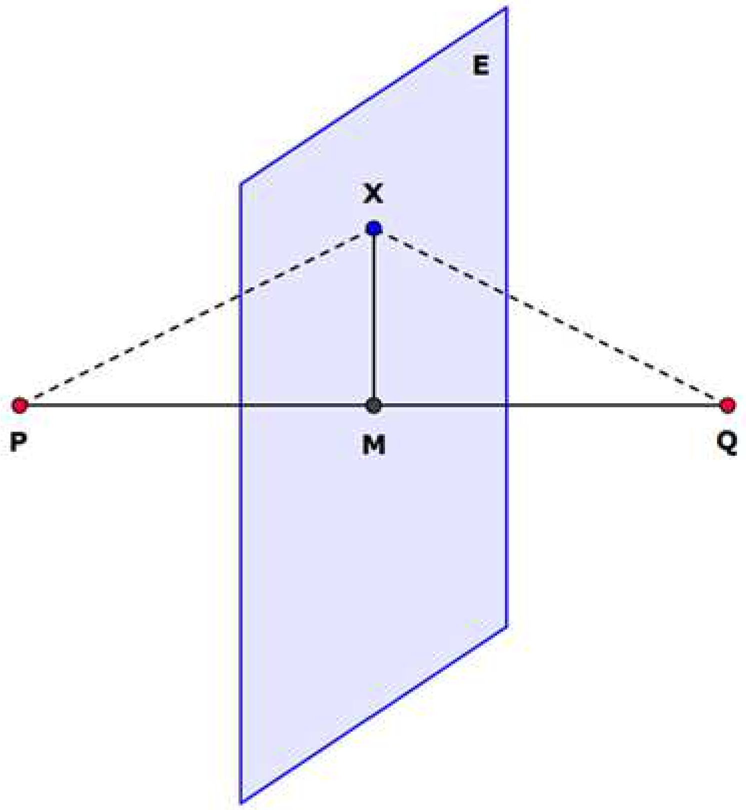
Gesucht ist die **Mittelebene** der Punkte P und Q. Der Mittelpunkt M(3/-2/6) der Strecke zwischen P und Q ist ein Punkt dieser Ebene, die gerichtete Strecke zwischen den beiden gegebenen Punkten kann als Normalenvektor der Ebene genutzt werden. Somit können die Punkt-Normalenform und die Koordinatenform der gesuchten Ebene mühelos angegeben werden:

$$\vec{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

also: $$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} \right] \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Lösung: E: $x - 2y + 2z = 19$

vgl. zu dieser Aufgabe die Skizze auf der folgenden Seite!



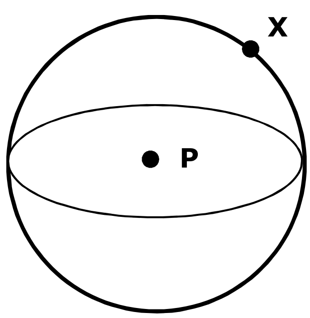
Teil I)

i) Wir suchen einen Vektor, der Skalar multipliziert mit sich selbst 16 ergibt, dies ist etwa ein Vektor, bei dem zwei Komponenten auf 0 und eine auf 4 gesetzt sind. Dieser Vektor muss sich als Differenzvektor ergeben (vgl. Ausdruck in der Klammer). Da P(2/0/4) gegeben ist, können wir für zum Beispiel den Punkt X(6/0/4) wählen.

ii) Die Vektorgleichung zeigt auf der linken Seite ein Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst, dies ist bekanntlich gleichbedeutend mit dem Quadrat aus der Länge des Vektors. Man kann die Gleichung also auch in der folgenden Gestalt lesen:

K: $\left| \vec{x} - \vec{p} \right| = 4$

Die Menge aller Punkte, die 4 LE von dem fest vorgegebenen Punkt P entfernt liegen, bilden offensichtlich eine Kugel mit dem Mittelpunkt P und dem Radius r = 4 cm (genauer gesagt: alle Punkte auf der Peripherie der Kugel).



Aufgabe 2

Die entscheidenden Punkte für den Schattenwurf sind C, D, E und F. A und B liegen bereits in der Bodenebene und stimmen somit mit ihren Bildpunkten überein. Man stellt nun jeweils eine Geradengleichung mit einem solchen Punkt als Stützpunkt und dem Sonnenstrahlvektor als Richtungsvektor auf und schneidet diese Gerade mit der Bodenebene (z = 0). Das Ergebnis ist jeweils ein charakteristischer Punkt des Schattenwurfs.

C(8/0/6), D(6/0/9), E(3/0/3) und F(0/0/6)

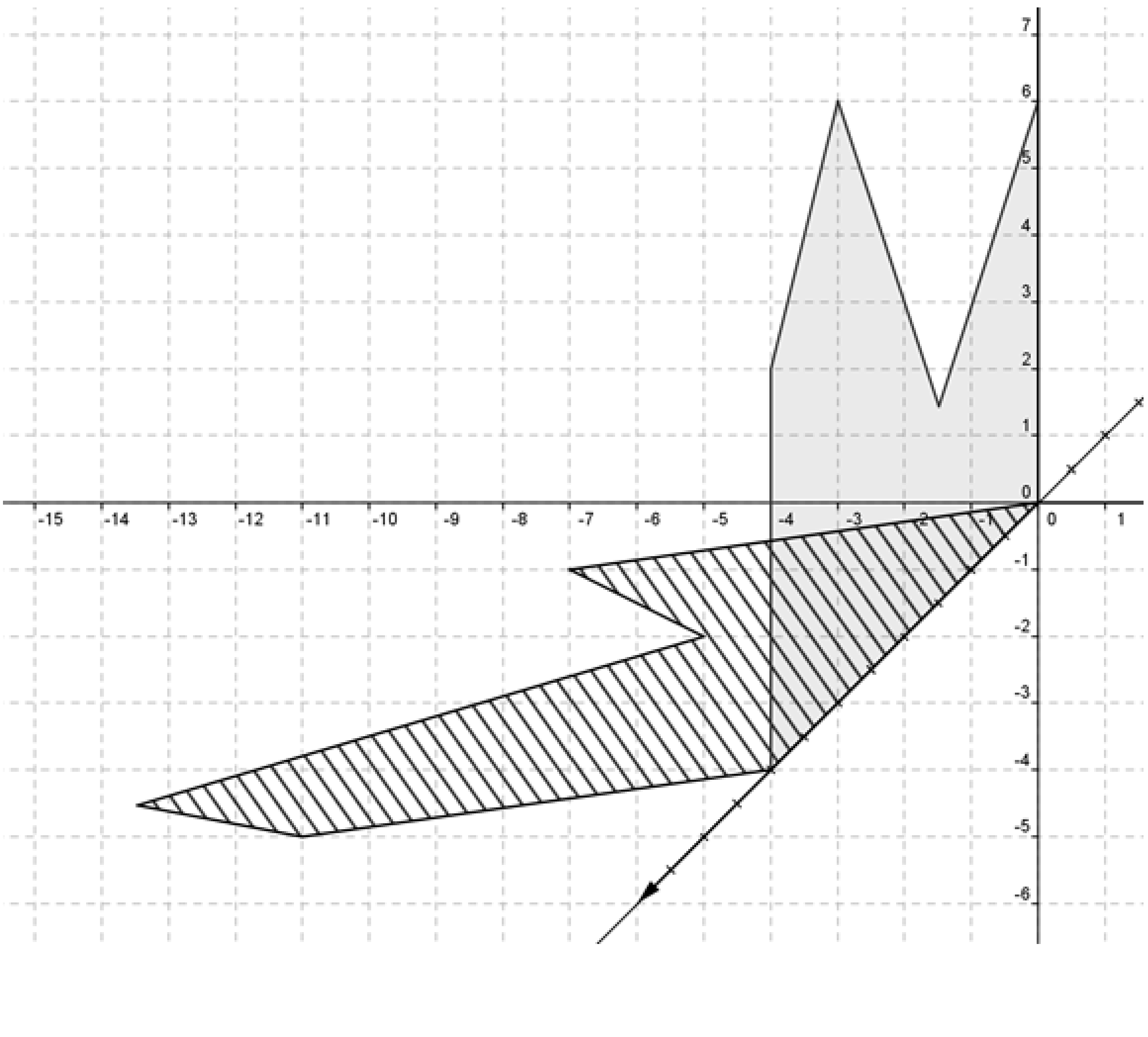
g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; g_2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; g_3: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$; g_4: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$z_1 = 0$, d. h. $\lambda = 2 \Leftrightarrow$ C‵(10/-6/0)

$z_2 = 0$, d. h. $\lambda = 3 \Leftrightarrow$ D‵(9/-9/0)

$z_3 = 0$, d. h. $\lambda = 1 \Leftrightarrow$ C‵(4/-3/0)

$z_4 = 0$, d. h. $\lambda = 2 \Leftrightarrow$ C‵(2/-6/0)



MUSTERLÖSUNG FÜR AUFGABE 1