Musterlösung der Klausur

Aufgabe 1

a) $k = 7! = 5040$

b) $k = \frac{8!}{2! \cdot 3!} = 3360$ (bedenke dabei die mehrfach auftretenden Buchstaben)

Aufgabe 2

a) $P(E_1) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}02048$

b) $P(E_2) = 1 - 0{,}2^6 = 0{,}999936$

c) $P(E_3) = \binom{10}{8} \cdot 0{,}8^8 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}302$

d) $P(E_4) = \binom{20}{k} \cdot 0{,}8^k \cdot 0{,}2^{20-k}$

e) $P(E_5) = \binom{4}{2} \cdot 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8 = 0{,}12288$

f) $P(E_6) = F_{50;0,8}(44) = 0{,}9520$

g) $P(E_7) = 1 - F_{50;0,8}(36) = 0{,}8894$

h) $P(E_8) = F_{100;0,8}(85) - F_{100;0,8}(71) = 0{,}8996$

Aufgabe 3

a) $P(E_1) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{22}{4}} \approx 0{,}06767$

b) $P(E_2) = \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1}}{\binom{22}{4}} \approx 0{,}21654$

c) $P(E_3) = 1 - \frac{\binom{16}{4}}{\binom{22}{4}} \approx 0{,}7512$

d) $P(E_4) = \frac{\binom{12}{k} \cdot \binom{10}{4-k}}{\binom{22}{4}}$

e) $P(E_5) = \frac{\binom{12}{2} \cdot 24 + \binom{4}{2} \cdot 72 + \binom{6}{2} \cdot 48}{\binom{22}{4}} \approx 0{,}374$

Aufgabe 4

a) $k = \binom{50}{2} = 1225$

b) $\binom{n}{2} = 17205 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2} = 17205 \Leftrightarrow n(n-1) = 34410 \Leftrightarrow n^2 - n - 34410 = 0$

$n_1 = 186$ und $n_2 = -185$ (keine Lösung im Sinn der Aufgabenstellung)

Aufgabe 5

a) $P(E_1) = \dfrac{\binom{5}{3} \cdot \binom{25}{2}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}02105$

b) $P(E_2) = \dfrac{\binom{5}{k} \cdot \binom{25}{5-k}}{\binom{30}{5}}$

c) $P(E_3) = \dfrac{\binom{2}{2} \cdot \binom{28}{3}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}02299$

d) $P(E_4) = \dfrac{\binom{15}{2} \cdot \binom{15}{3}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}3352$

e) $P(E_5) = \dfrac{\binom{1}{1} \cdot \binom{18}{4}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}02147$

f) $P(E_6) = \dfrac{\binom{1}{1} \cdot \binom{k-1}{4}}{\binom{30}{5}}$

g) $P(E_7) = 1 - P(\text{alle getrennt}) \approx 0{,}5384$

Denke bei g) an die bekannte Hilfsnotation mit 5 Symbolen der Art „ox“ und 21 Symbolen der „o“ – es gilt dann: $P(\text{alle getrennt}) = \dfrac{\binom{26}{5}}{\binom{30}{5}} \approx 0{,}4616$.

Aufgabe 6

$$\binom{n}{k+1} = c \cdot \binom{n}{k} \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)!} = c \cdot \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{n! \cdot (n-k)! \cdot k!}{(n-k-1)! \cdot (k+1)! \cdot n!}$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{n-k}{k+1}$$

Aufgabe 7

$1 - P(\text{kein Sechserpasch}) = 0{,}9999 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n = 0{,}9999 \Leftrightarrow \left(\frac{35}{36}\right)^n = 0{,}0001$

also: $n = \log_{\frac{35}{36}}(0{,}0001) \approx 326{,}95$

Man muss also mindestens 327-mal würfeln!

[Natürlich ist die Aufgabe auch über einen Relationsansatz zu lösen. Aufrunden des Ergebnisses, das man mit Hilfe eines Gleichungsansatzes findet, ist aber auch überzeugend!]

Aufgabe 8

Teil a)

Ein Weg kann eindeutig beschrieben werden, indem man die jeweilige Bewegungsrichtung mit einem entsprechenden Symbol bezeichnet, also etwa R für RECHTS und H für HOCH (0 und 1 ist ebenso zweckmäßig). Es entsteht dann eine Kette aus x + y Symbolen, wobei x-mal das Symbol R und y-mal das Symbol H auftaucht. Es gibt somit genau $\binom{x+y}{x} = \binom{x+y}{y}$ Wege von P(0/0) nach Q(x/y).

Teil b)

Unter a) wurde gezeigt, dass es $\binom{14}{7}$ Wege von P(0/0) nach Q(7/7) gibt („günstige Wege" im Sinne der Aufgabenstellung). Bei 14 Schritten sind insgesamt 2^{14} Wege denkbar. Also gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p_1 = \frac{\binom{14}{7}}{2^{14}} \approx 0{,}2095$$

Teil c)

Unter a) wurde gezeigt, dass es $\binom{8}{4}$ Wege von P(0/0) nach R(4/4) und $\binom{6}{2}$ Wege von R(4/4) nach Q(8/6) gibt. Das Produkt dieser beiden Binomialkoeffizienten zählt die Anzahl der „günstigen Wege" im Sinne der Aufgabenstellung. Bei 14 Schritten sind insgesamt abermals 2^{14} Wege denkbar. Also gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$p_2 = \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{6}{2}}{2^{14}} \approx 0{,}0641$$

Aufgabe 9

a) E(X) = E(Y) = 3 und V(X) = 0,5 sowie V(Y) = 2,8
b) Die beiden Zufallsvariablen X und Y stimmen in ihrem Erwartungswert überein, ihre Varianz unterscheidet sich hingegen deutlich voneinander!
c) Die Varianz gibt an, wie groß die möglichen Belegungen der Zufallsvariablen um deren Erwartungswert **streuen (Maß für die Abweichung vom Erwartungswert)**. Das Quadrat in der Formel sorgt dabei dafür, dass sich betragsgleiche Abweichungen vom Erwartungswert mit umgekehrtem Vorzeichen nicht gegenseitig aufheben!